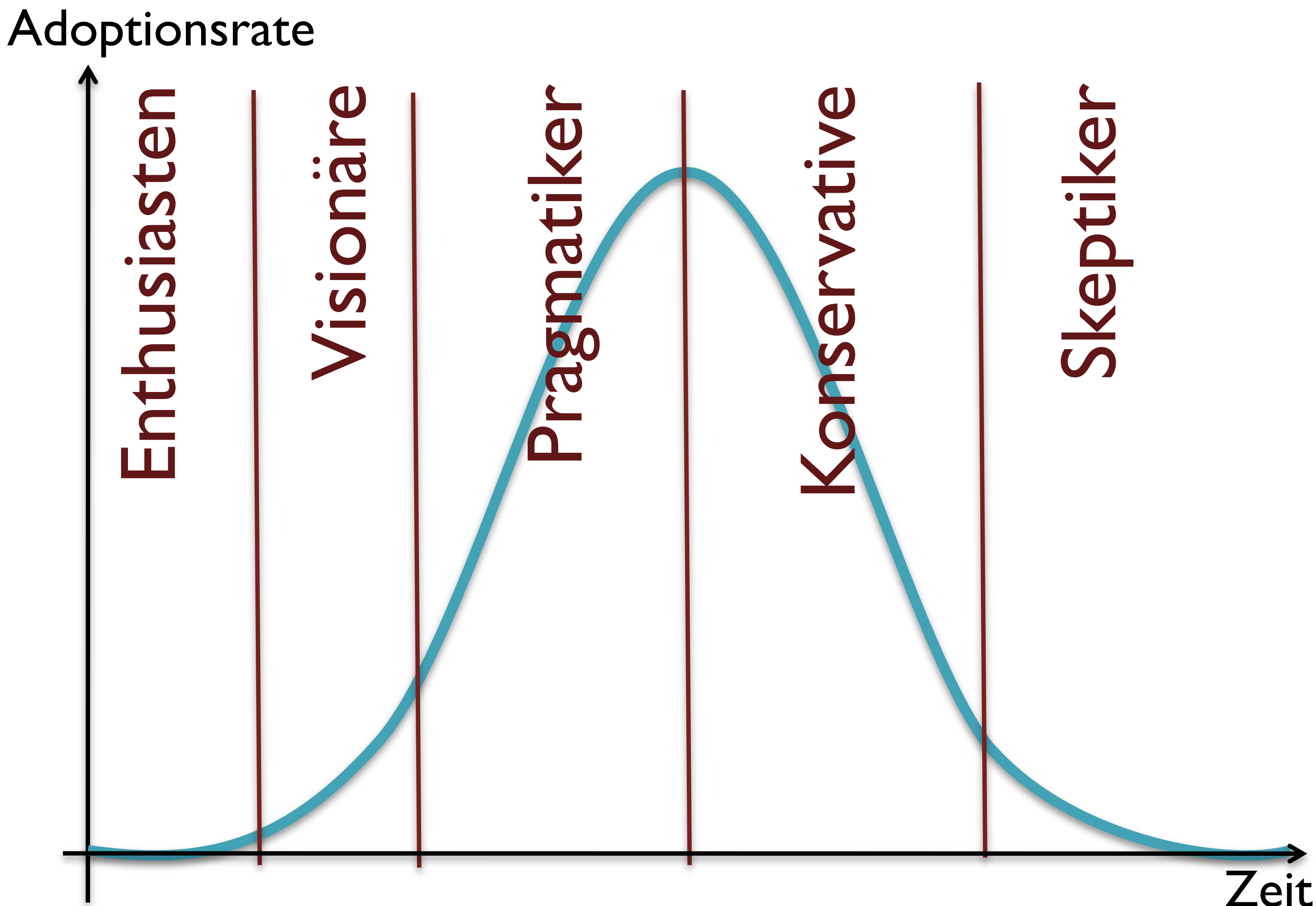
Mathematik und eLearning an US-Hochschulen
Ansätze zum Lernen von Beweisen

Gerd Kortemeyer
Associate Professor
Didaktik der Physik
Michigan State University

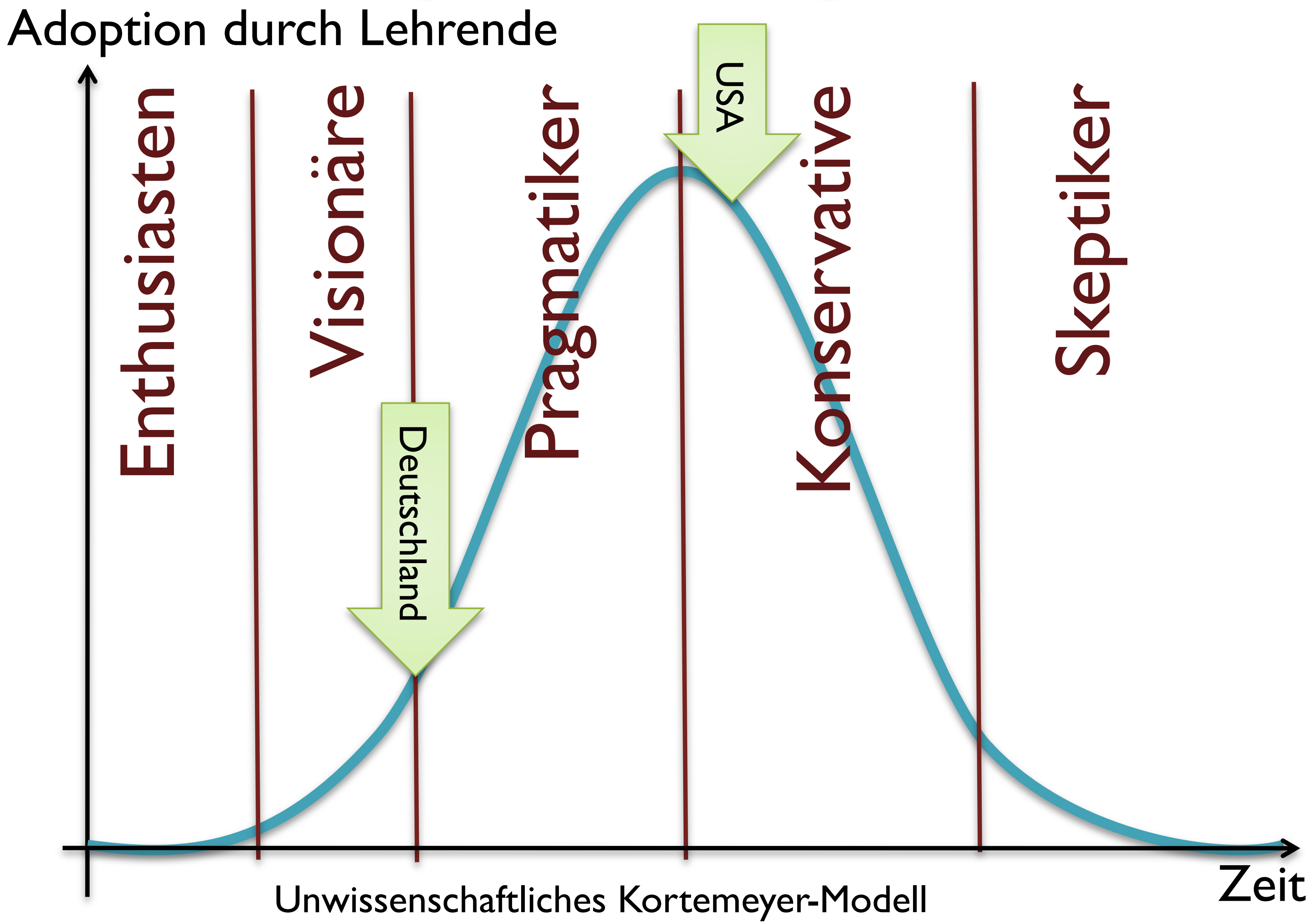
SourceTalk 2010
Göttingen

Moore Model von Innovation



Basierend auf Geoffrey A. Moore, *Bridging the Chasm*, 1991

ELearning Technologien



ELearning Technologien

- Deutschland:
  - Häufig freiwilliges Angebot
  - Sorgen: „Was werden die Studierenden denken? Werden sie es annehmen?“
  - Angst vor „Verschulung der Lehre“
  - Typisch deutsche Skepsis (Feigheit?)
- USA:
  - Häufig integraler Bestandteil des Lehrbetriebes
  - Teilnahme verpflichtend (Punktevergabe)
  - Studierende erwarten, dass Veranstaltungen eine Onlinepräsenz haben
  - Typisch amerikanischer Pragmatismus (Mut?)

ELearning Technologien

- Deutschland:
  - Viele Nischen- und Bastlersysteme
  - Nicht „mission critical“
- USA:
  - „Enterprise Systems“
  - „Mission critical“
  - Wenn das Learning Management System zusammenbricht, können viele Veranstaltungen nicht stattfinden

ELearning Technologien

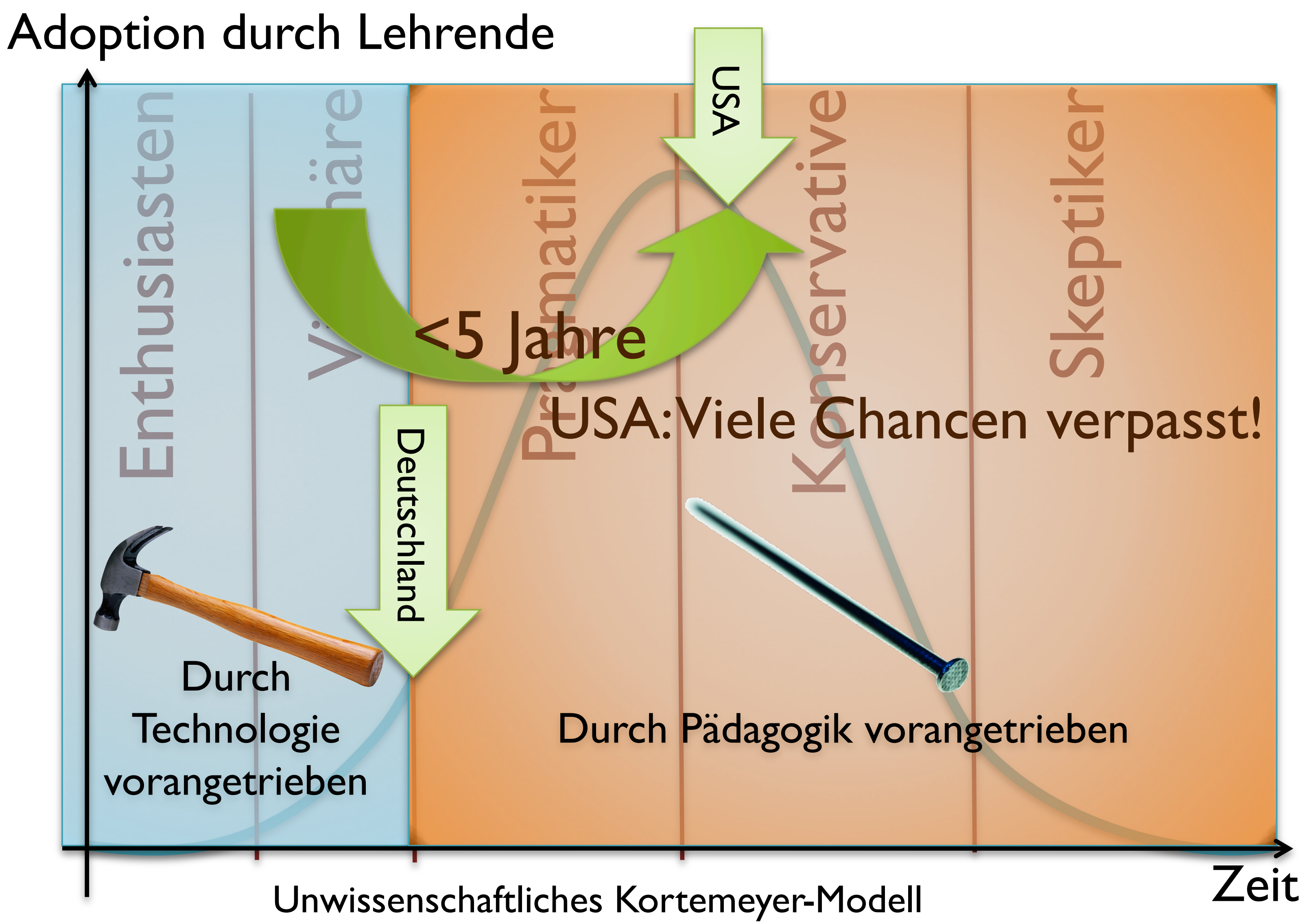
- In den USA hat die „Mission Criticality“ dazu geführt, dass viele Universitäten kommerzielle Systeme eingeführt haben
  - WebCT
  - BlackBoard
  - ANGEL
  - Desire2Learn
- Skepsis gegenüber Open-Source:
  - Moodle – skalierbar für zehntausende von Studierenden und tausende von Kursen?
  - Sakai – Totgeburt?
- Problem im Moment: Konsolidierung des kommerziellen Marktes
  - BlackBoard kaufte WebCT und ANGEL
  - BlackBoard verklagt Desire2Learn

Elearning Technologien

- Ziel dieser Enterprise-Systeme: 80% der Nutzungsszenarien effizient abdecken:
  - Dokumentenschleuder
  - Bekanntmachungen
  - Studierende können Dokumente hochladen zur Benotung
  - Diskussionen
  - Einfache Quize und Hausübungen
- Verwaltungssysteme, Pädagogik kommt oft zu kurz

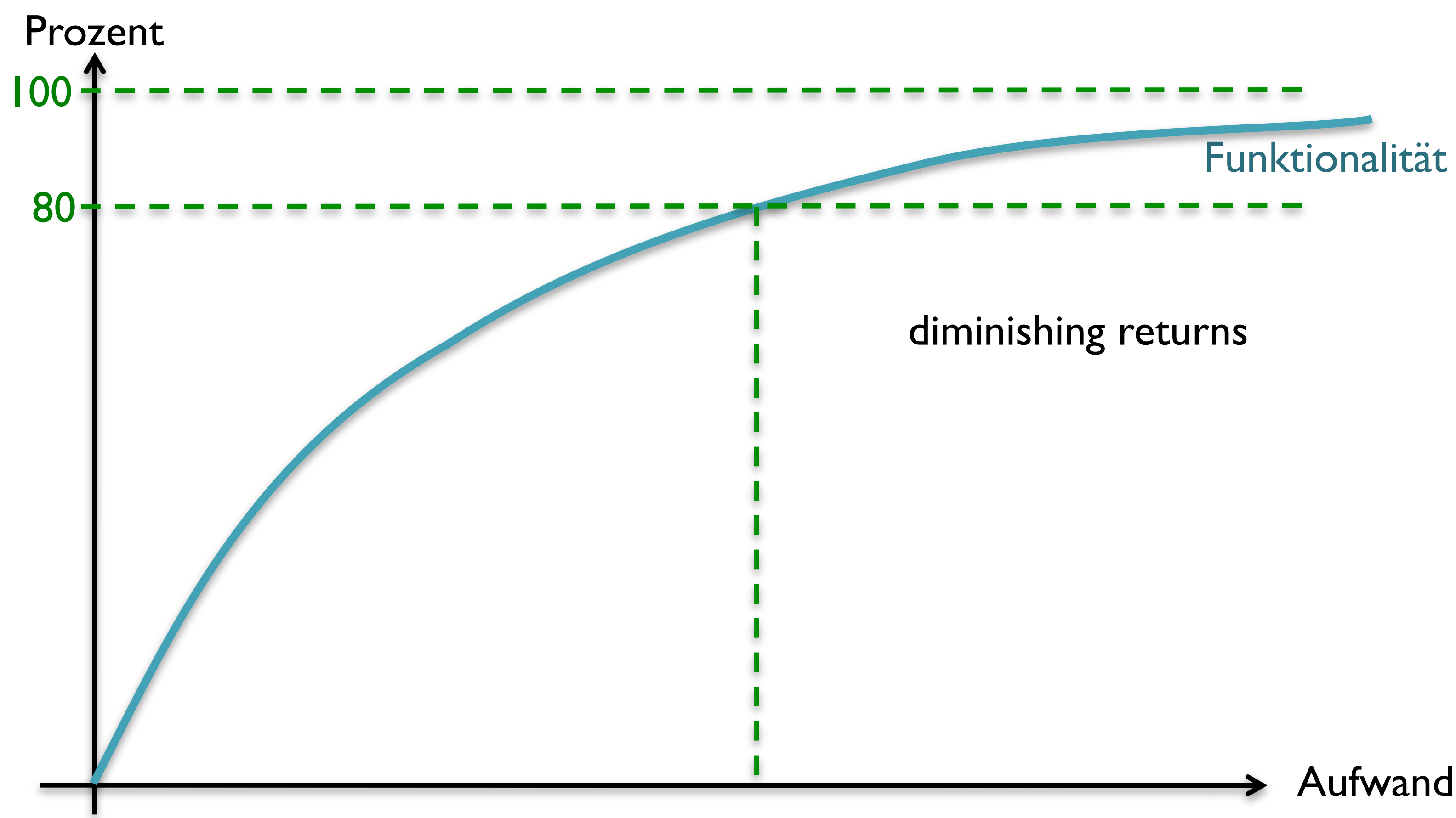
Gnade der späten Geburt?

Treibende Kräfte ändern sich während die Technologie ausreift



Die 80%

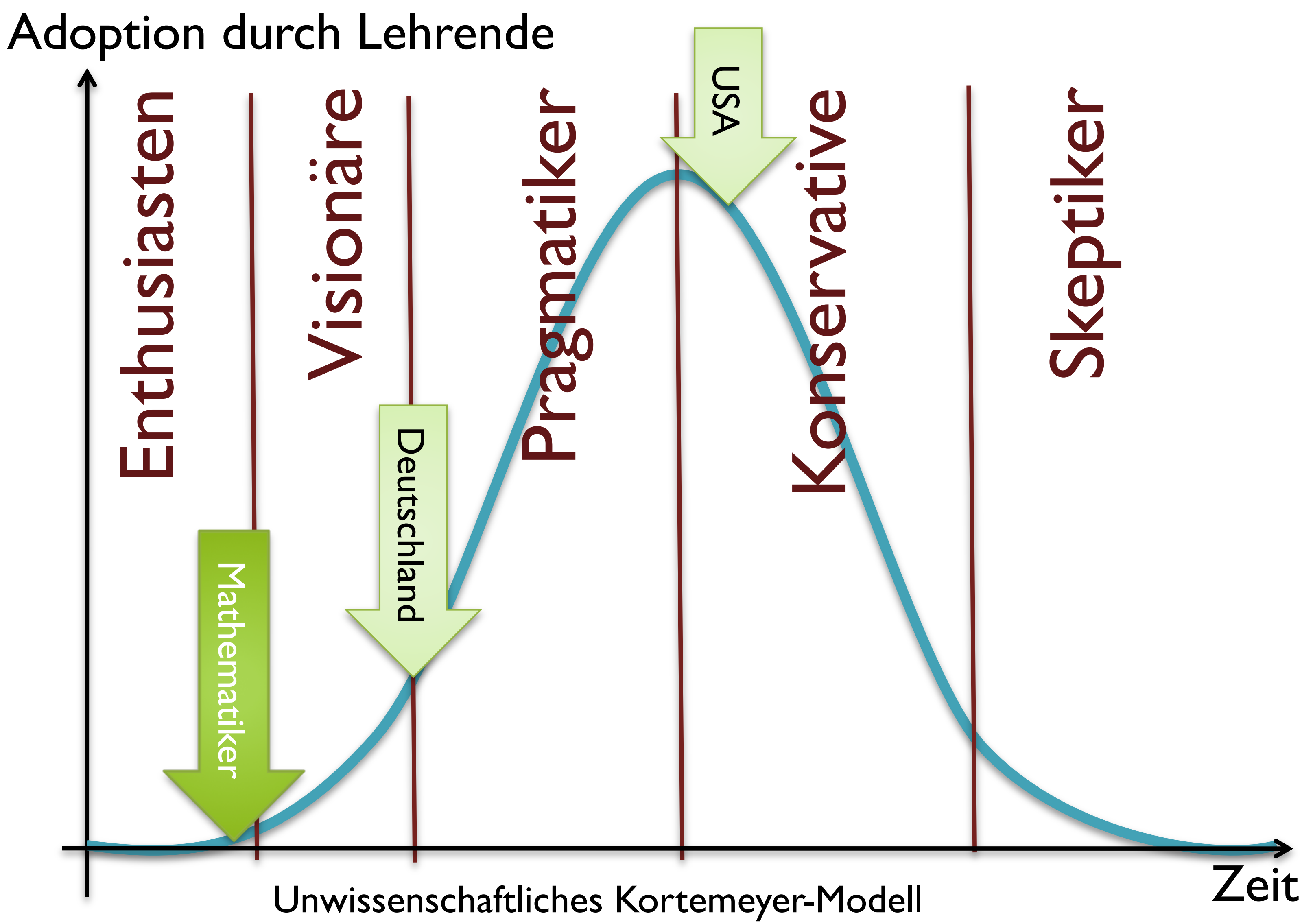
- Kommerzielle Systeme werden auch weiterhin den 80%-Markt bedienen



Die 20%

- Enterprise Systeme decken 80% ab
- Was ist mit den 20%?
- Beschränkter Markt
  - Nischensysteme, Bastlersysteme
    - Häufig an den Lehrenden vorbeientwickelt, „Build it and they will come“; komplex oder abstrakt (theorielastig); unstabil
  - Spezialisierte Systeme, die durch die Textbuchverlage angeboten werden
    - Unflexibel, auf bestimmtes Buch zugeschnitten; keine Pädagogik
- Pragmatiker und Konservative brauchen benutzerfreundliche Systeme
  - „Packaged“, Komplexität versteckt
  - Praxisbezogen, unmittelbar relevant
  - Reine Webapplikation, keine Client-Plugins, etc.
- ... und das erklärt auch ...

Die 20%

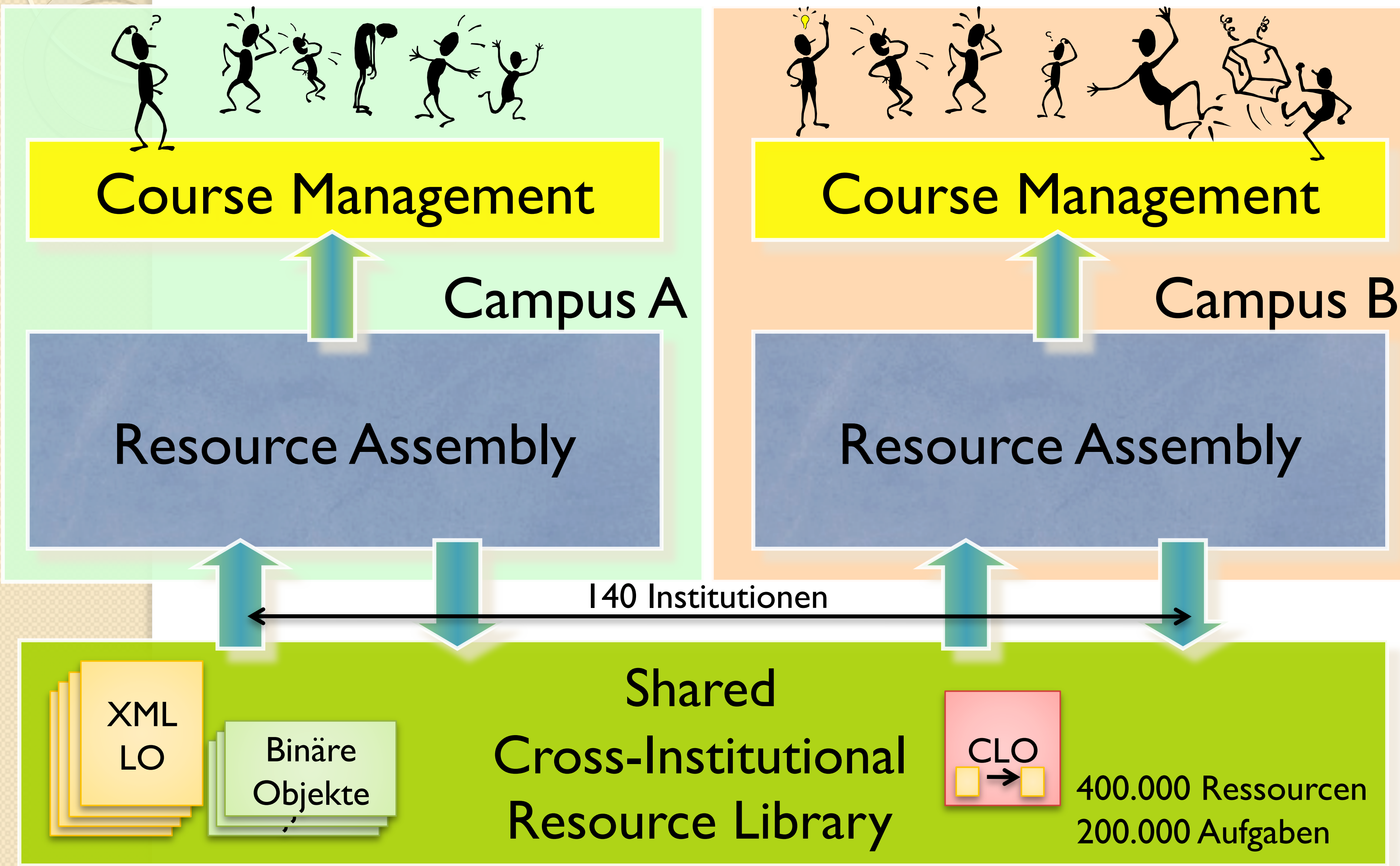


Adoption durch Lehrende
Enthusiasten
Visionäre
Pragmatiker
Konservative
Skeptiker
USA
Deutschland
Mathematiker
Zeit
Unwissenschaftliches Kortemeyer-Modell

80%<x<100% Nutzungsszenarien essentiell für die Mathematiklehre!

- Mathematischer Typensatz
  - obwohl am CERN erfunden, bietet das Web kaum brauchbare Unterstützung von mathematischem Typensatz
- Aufgaben: mathematische Äquivalenz von Ausdrücken
  - nicht einfach nur Vergleich von Zeichenketten
- Aufgaben: mehr als eine Lösung
  - häufig müssen Ausdrücke nur bestimmte Bedingungen erfüllen
- Aufgaben: schwer zu randomisieren
  - Variation der Aufgaben benötigt symbolische Manipulationen
- Aufgaben: Antwort soll eine bestimmte Form haben
  - Beispiel: schreibe Antwort in faktorisierter Form
  - Beispiel: schreibe in vereinfachter Form (gar nicht so einfach!)
  - Geht über rein mathematische Äquivalenz hinaus
- Beweise:
  - haben eine zentrale Rolle in der Mathematik, sind aber hochgradig offen und nur sehr bedingt algorithmisch auswertbar
  - trotz strikter Logik kreativ und „menschlich“

Illustration anhand LON-CAPA

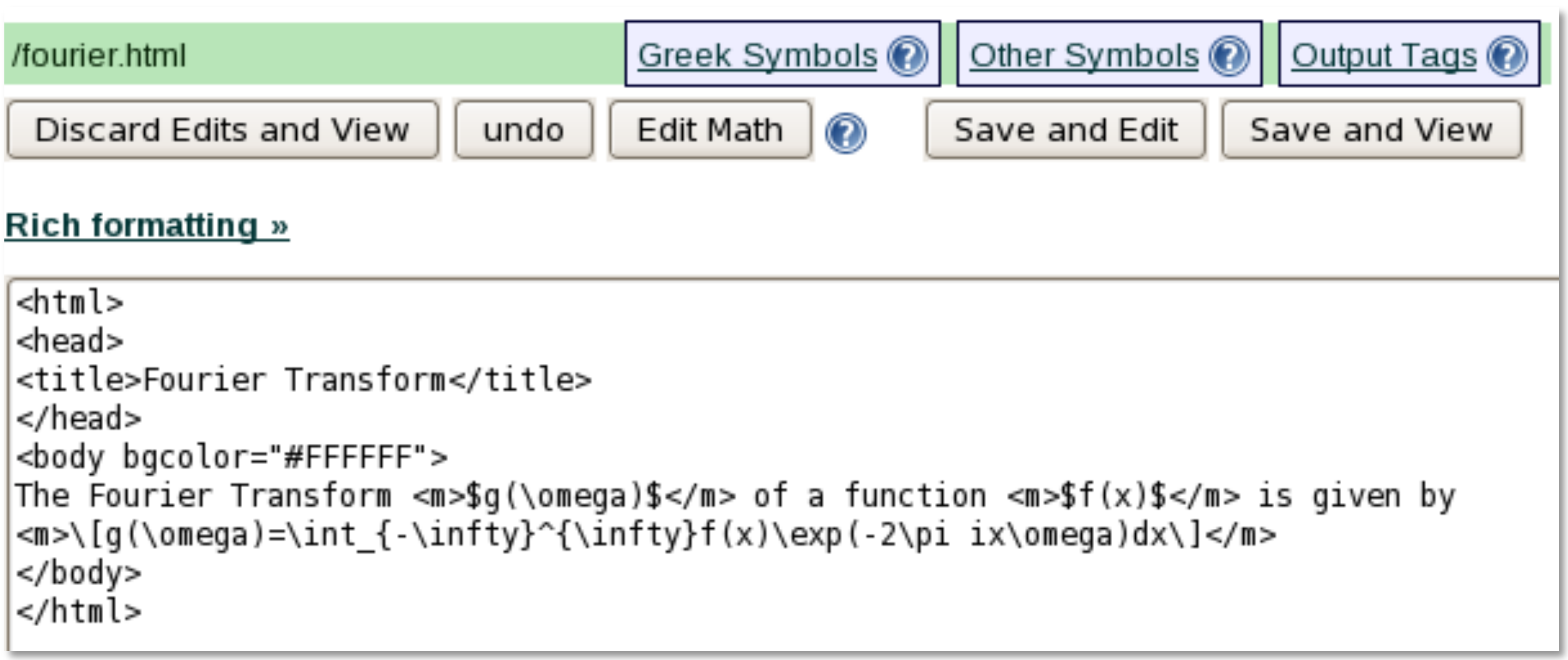


Mathematischer Typensatz

- Keine Unterstützung in HTML
- MathML momentan wunderschön in Theorie (besonders die Semantik), aber in der Praxis kaum verwendbar:
  - schlechte Browserunterstützung
    - Opera: weitgehend
    - Firefox: teilweise
    - Safari: nur in Testversionen
    - Internet Explorer: nur mit Plugin
  - MathML ist fast unmöglich von Hand zu schreiben
  - Sobald MathML verwendet wird, muss auch der Rest der Seite strikt XML-konform sein, oder viele Renderer brechen ab
- Mathematiker und Physiker sprechen LaTeX
- Ich bin **gerne** bereit, mich von MathML 3.0 überraschen zu lassen

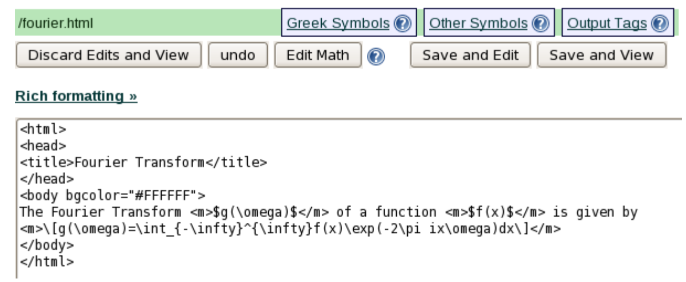
Mathematischer Typensatz

- In LON-CAPA: direkte Einbindung von LaTeX in HTML/XML

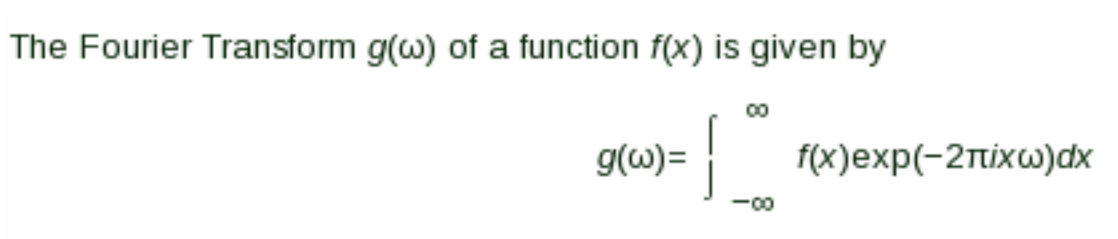


Mathematischer Typensatz

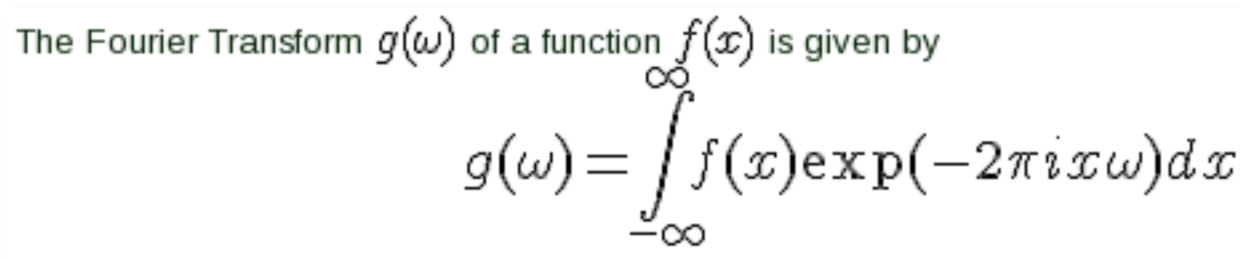
- On-the-Fly Darstellung abhängig von Nutzereinstellungen



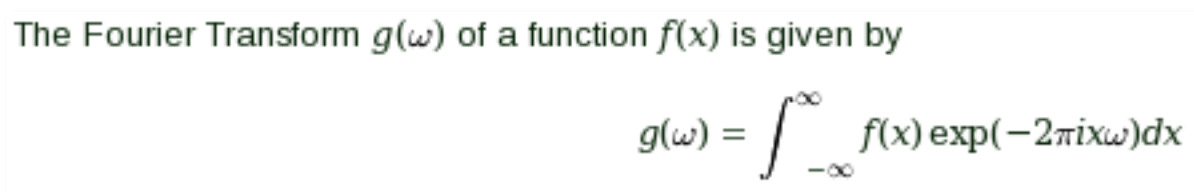
tth:



MimeTeX:



jsMath:



Mathematische Äquivalenz

- Einfacher Vergleich von mathematischen Ausdrücken auf Äquivalenz
  - Maxima: genaue Äquivalenz
  - Sampling: ungefähre Äquivalenz
    - Numerische Berechnung der Funktion auf Stützpunkten mit Toleranz
    - Manchmal in der Physik interessant, wahrscheinlich weniger in der Mathematik

Mathematische Äquivalenz

```
<problem>

<script type="loncapa/perl">
$k=&random(3,6,1);
$formula="a*x^$k";
$m=$k-1;
$derivative="$k*a*x^$m";
</script>

<startouttext />
What is the derivative of <tt>$formula</tt> with respect to x?
<endouttext />

<formularesponse answer="$derivative">
    <textline size="25" />
</formularesponse>

</problem>
```

What is the derivative of a*x^6 with respect to x? `x*((a+1)*x^4-x^3*x)*6`

Submit Answer   Tries 0

Mehr als eine Lösung

- Abtesten von Bedingungen

Give an example of a function

1. which is orthogonal to

$$2\cdot\cos(11\cdot x)+2\cdot\sin(4\cdot x)$$

   with respect to the scalar product

$$< g \mid h > = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} dx\, g(x)\cdot h(x)$$

2. whose norm is 1.

Submit Answer Tries 0

Mehr als eine Lösung

Give an example of a function

1. which is orthogonal to

$$2 \cdot \cos(11 \cdot x) + 2 \cdot \sin(4 \cdot x)$$

   with respect to the scalar product

$$< g \mid h > = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx\, g(x) \cdot h(x)$$

2. whose norm is 1.

Submit Answer Tries 0

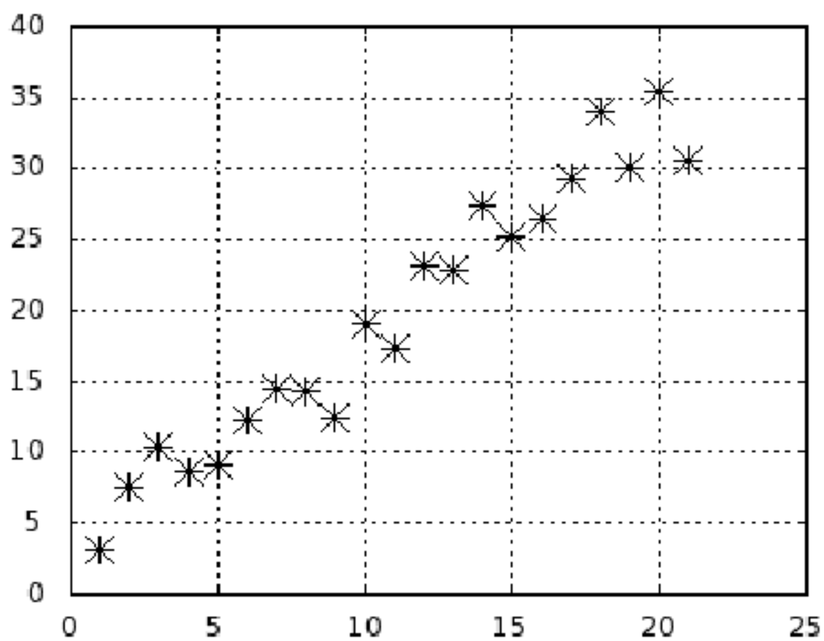
```
<mathresponse answerdisplay="$example" cas="maxima" args="$function">
    <answer>
overlap:integrate((RESPONSE[1])*(LONCAPALIST[1]),x,-%pi,%pi)/%pi;
norm:integrate((RESPONSE[1])*(RESPONSE[1]),x,-%pi,%pi)/%pi;
is(overlap=0 and norm=1);
    </answer>

    <textline readonly="no" size="50" />

</mathresponse>
```

Randomisierung

- Randomisierte Aufgaben sollen bestimmte mathematische Eigenschaften haben
- Beispiel: Zufallsverteilung mit bestimmten Eigenschaften

Sampling!

Consider the plotted data set.



Give a linear function approximating the data.

y(x)=

Submit Answer Tries 0

Answer for Part: 0	1.505274*x+3.111811	x@1:21#20

Script Vars

Randomisierung

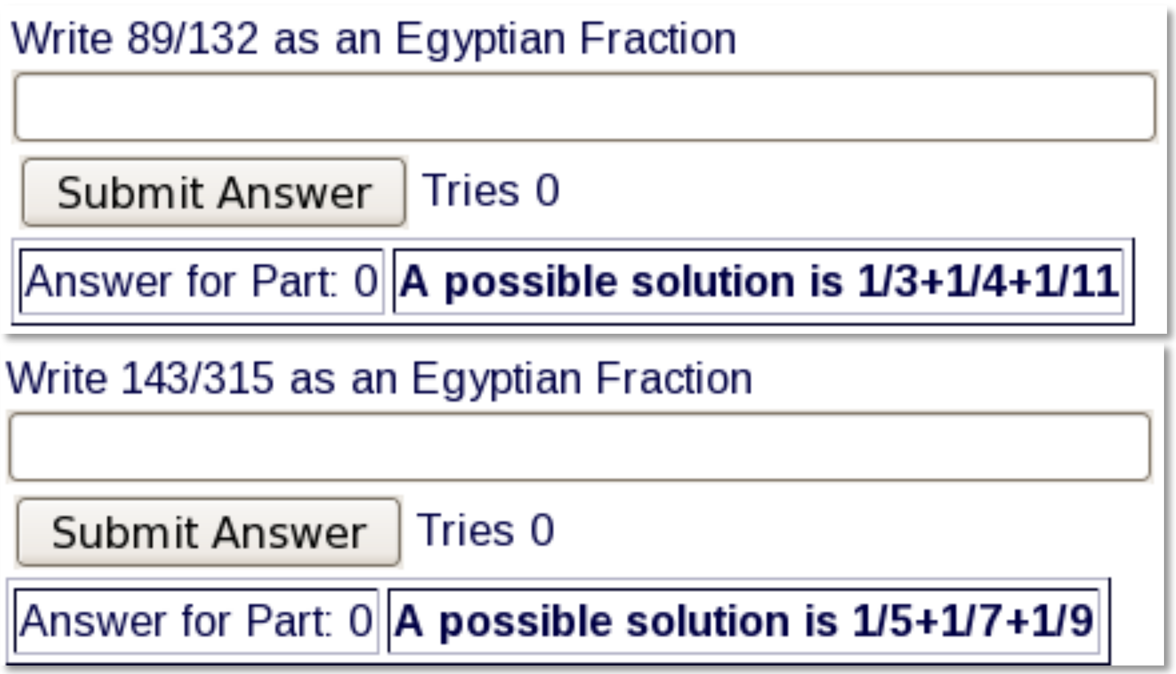
- Lösung: zuerst das Ergebnis randomisieren, dann Verteilung durch R erzeugen

```
<script type="loncapa/perl">
$seed=&random(1,500,1);
$n=&random(15,25,1);
$offset=&random(2,5,0.1);
$slope=&random(0.6,2.5,0.1);
# construct a data set using R
# dump is for debugging, print to screen to see data structure
($data,$dump)=&cas_hashref('R',"set.seed($seed);x<-1:$n;w<-1+sqrt(x)/2;
data.frame(x=x,y=$offset+$slope*x+rnorm(x)*w);");
@x=&cas_hashref_array($data,'x');
@y=&cas_hashref_array($data,'y');
```

```
<gnuplot width="400" grid="on" align="left" height="300">
    <curve linestyle="points" linetype="solid" color="x000000" pointtype="3" pointsize="2" linewidth="1">
        <data>@x</data>
        <data>@y</data>
    </curve>
</gnuplot>
```

Randomisierung

- Harmlos aussehendes Problem:



  - Ergebnis soll durch eine *kleine* Anzahl von Termen darstellbar sein
  - Bruch in der Aufgabe soll bereits gekürzt sein

Randomisierung

- Lösung: zuerst das Ergebnis erzeugen!

```
<problem>
<script type="loncapa/perl"># Construct an Egyptian Fraction that can
be represented by three terms with denominators between 3 and 12
@denominators=(&random_permutation(&random(1,1000,1),(3..12)))[0..2];
$egyptian='1/'.(join('+1/',sort{$a<=>$b}(@denominators)));
$possible="A possible solution is $egyptian";

# Let the CAS figure out the value
$solution=&cas('maxima',$egyptian);
```

```
</script>

<startouttext />

Write $solution as an Egyptian Fraction<br />
<endouttext />
```

Ergebnis soll bestimmte Form haben

- Über die mathematische Äquivalenz hinaus muss auch die Form bewertet werden.

Write 47/120 as an Egyptian Fraction

2/12+1/8+3/30

Egyptian Fractions have a format of 1/number+1/number+..., for example 1/3+1/17+1/52.

Write 47/120 as an Egyptian Fraction

1/4+1/42+1/5+1/42

Egyptian Fractions cannot have the same denominator more than once. For example, 1/3+1/17+1/4+/17 is not an Egyptian Fraction, as it has 17 twice as denominator.

Ergebnis soll bestimmte Form haben

- Schon schwerer, dies muss tatsächlich algorithmisch ausgewertet werden

```
# Subroutine that checks if the provided term is indeed an Egyptian
Fraction
sub analyze {
    my ($expression)=@_;
    $expression=~s/\s//gs;
    $expression=~s/\+?1\//\,/gs;
     if ($expression=~/^(\,[0-9]+)+$/) {
# Format is indeed 1/n+1/m+...
        $last=-1;
        foreach $number (sort { $a<=>$b } split(/\,/,$expression)) {
# Is a number used twice?
             if ($last==$number) { return(0,1); }
             $last=$number;
          }
          return(0,0);
     }
     return(1,0);
}
```

```
<customresponse answerdisplay="$possible" id="11">
    <answer type="loncapa/perl"># Analyze the format
($formaterror,$doubleerror)=&analyze($submission);
if ($formaterror || $doubleerror) { return 'BAD_FORMULA'; }
# It is an Egyptian Fraction, is the value correct?
if (&cas('maxima',$submission.'-('.$egyptian.')') eq '0') {
    return 'EXACT_ANS';
}
return 'INCORRECT';</answer>
```

Beweise

- The Holy Grail
- Warum so schwierig?
- Hochgradig kreative Aktivität
- Außer für Trivialaufgaben ist es unmöglich, im Voraus abzusehen, welchen Weg besonders bessere Studierende einschlagen
- Zwar können einzelne Schritte häufig auf Korrektheit untersucht werden, jedoch ist es schwerlich möglich,
  - herauszufinden, ob die Gesamtheit des Beweises sinnvoll ist, oder
  - ob der Beweis überhaupt ein Beweis ist
- Eleganz ist Geschmackssache

Beweise

- Fazit: Derzeit kann man
  - bedingt die Folgerichtigkeit von Beweisen per Computer prüfen,
  - jedoch nicht die Vollständigkeit und
  - nicht die „Eleganz“ oder „Schönheit“
- Einige simple Ansätze: Beweise nachvollziehen

Beweise nachvollziehen

- Veselin Jungic, Simon Fraser University (Kanada, nicht USA!)
- Beweise werden in der Vorlesung vorgestellt
- Studierende müssen diese oder ähnliche Beweise als Hausübung in LON-CAPA nachvollziehen
- Ergänzung zu, nicht Ersatz von schriftlichen Hausübungen

Beweise nachvollziehen

Gerd Kortemeyer (Course Coordinator) **Test Course VIPP** (More ...) Messages Roles Help Logout

Main Menu | **Course Contents** | **Course Editor** | **Groups** | Switch course role to...

Course Contents » **Riemann Integral: Zero Function**

Functions Modify user grades for this assessment resource Modify parameter settings for this resource

Fill in the blanks in the proof of the following theorem.

THEOREM: Let f be continuous on $[a,b]$ and suppose that $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$. Prove that if $\int_a^b f=0$, then $f(x)=0$ for all $x \in [a,b]$.

Note. We use as a fact that if f is a bounded function on $[a,b]$ such that $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$ then $\int_a^b f \geq 0$.

Proof: Let $\int_a^b f=0$ and suppose that there is $c \in [a,b]$ so that $f(c)=\alpha > 0$. Since f is ___ there is $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in [a,b],\ \ |x-c| < \delta \Rightarrow\ \ |f(x)-\alpha| < \alpha/2\ .$$

Since $|f(x)-\alpha| < \alpha/2$ is equivalent to

$-\alpha/2$ ___ $f(x)-\alpha$ ___ $\alpha/2$,

it follows that for all $x \in [a,b]$, $|x-c| < \delta$ ___ that $f(x)$ ___ $\alpha/2$.

Let $[d,e] \subseteq [a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)$ be so that $c \in [d,e]$. From $a \leq d < e \leq b$ it follows that

$\int_a^b f$ ___ $\int_a^d f$ ___ $\int_d^e f$ ___ $\int_e^b f$.

Since $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,d] \cup [e,b]$ we have that $\int_a^d f+\int_e^b f \geq$ ___ .

Submit Answer Tries 0/3

Since $f(x) > \alpha/2$ for all $x \in [d,e]$, by definition of the ___ integral we have that

$\int_d^e f \geq (e-d) \cdot \min\{ f(x):\ x \in [d,e]\}$ ___ $(e-d)\ \cdot\alpha/2$ ___ 0.

Thus,

$\int_a^b f=\int_a^d f+\int_d^e f+\int_e^b f$ ___ 0, which ___ our assumption that $\int_a^b f$ ___ 0.

Therefore, if f is continuous and $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$ then $\int_a^b f=0$ implies that $f(x)=0$ for all $x \in [a,b]$.

Submit Answer Tries 0/3

Post Discussion Send Feedback

Beweise nachvollziehen

Gerd Kortemeyer (Course Coordinator) **Test Course VIPP** (More ...) Messages Roles Help Logout

Main Menu | **Course Contents** | **Course Editor** | **Groups** | Switch course role to...

Course Contents » **Limits of Functions: Quotient**

Functions Modify user grades for this assessment resource Modify parameter settings for this resource

Fill in the blanks in the proof of the following theorem.

THEOREM: Let $f{:}D\to \mathbf{R}$, $g{:}D\to \mathbf{R}$, and let c be an accumulation point of D. If $\lim_{x\to c} f(x)=L$ and $\lim_{x\to c} g(x)=M$ with $g(x)\neq 0$ for all $x \in D$ and $M \neq 0$, then

$$\lim_{x\to c} (f/g)(x)=L/M.$$

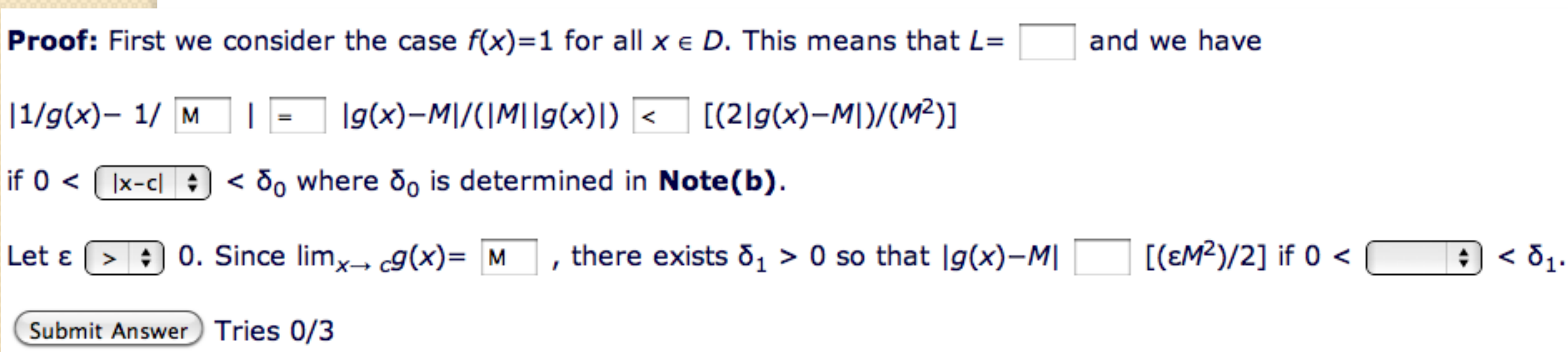
Notes:
(a) We use as a fact that if $\lim_{x\to c} F(x)=l$ and $\lim_{x\to c} G(x)=m$ then $\lim_{x\to c} (FG)(x)=lm$.
(b) We use as a fact that from $\lim_{x\to c} g(x)=M \neq 0$ it follows that

$$\exists \delta_0 > 0 \ni (0 < |x-c| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)| > |M|/2).$$

(**Prove** this statement.)

Beweise nachvollziehen

- Erster Teil: Vorarbeiten
  - Lösung durch Einfügen oder Auswählen von Symbolen und Beziehungen



Proof: First we consider the case $f(x)=1$ for all $x \in D$. This means that $L=$ [ ] and we have

$|1/g(x) - 1/$ [M] $|$ [=] $|g(x)-M|/(|M||g(x)|)$ [<] $[(2|g(x)-M|)/(M^2)]$

if $0 <$ [|x-c|] $< \delta_0$ where δ_0 is determined in **Note(b)**.

Let ε [>] 0. Since $\lim_{x\to c} g(x)=$ [M] , there exists $\delta_1 > 0$ so that $|g(x)-M|$ [ ] $[(\varepsilon M^2)/2]$ if $0 <$ [ ] $< \delta_1$.

Submit Answer Tries 0/3

Beweise nachvollziehen

- Erster Teil: Vorarbeiten
  - Hinweise: erwartete Schwierigkeiten, z.B.

$$\exists \delta_0 > 0 \ \ni \ (0 < |x-c| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)| > |M|/2)\ .$$

aber der Beweis verwendet den Kehrwert:

Proof: First we consider the case $f(x)=1$ for all $x \in D$. This means that $L=$ [1] and we have

$|1/g(x) - 1/$ [M] $|$ [=] $|g(x)-M|/(|M||g(x)|)$ [>]

What happens when we replace the denominator with a smaller number?

$[(2|g(x)-M|)/(M^2)]$

if $0 <$ [|x-c|] $< \delta_0$ where δ_0 is determined in **Note(b)**.

Let ε [>] 0. Since $\lim_{x\to c} g(x)=$ [L] , there exists $\delta_1 > 0$ so that $|g(x)-M|$ [<] $[(\varepsilon M^2)/2]$ if $0 <$ [|x-c|] $< \delta_1$.

Submit Answer Incorrect. Tries 1/3 Previous Tries

Beweise nachvollziehen

- Erster Teil: Vorarbeiten

Proof: First we consider the case $f(x)=1$ for all $x \in D$. This means that $L=$ **1** and we have

$|1/g(x)- 1/\mathbf{M}| = |g(x)-M|/(|M||g(x)|) < [(2|g(x)-M|)/(M^2)]$

if $0 < |x-c| < \delta_0$ where δ_0 is determined in **Note(b)**.

Let $\varepsilon > 0$. Since $\lim_{x\to c} g(x) = \mathbf{M}$, there exists $\delta_1 > 0$ so that $|g(x)-M| < [(\varepsilon M^2)/2]$ if $0 < |x-c| < \delta_1$.

You are correct. Computer's answer now shown above.
Your receipt no. is 159-1816

Previous Tries

  - Nächster Teil: Schlussfolgerung

Beweise nachvollziehen

- Zweiter Teil: Schlussfolgerung

Finally, let $\delta = \min(\delta_0,\delta_1)$. Then, for all $x \in D$ such that $0 <$ |x-c| $< \delta$ we have $|1/g(x)-1/M|$ $<$ $[(2|g(x)-M|)/(M^2)]$ $<$ $(2/(M^2))(\varepsilon M^2/2)$ $<$ ε.

Wenn man schon mal dabei ist, alles so schön klein zu machen

This shows that $\lim_{x\to c} 1/g(x)=1/M$.

Now, for an arbitrary numerator $f(x)$, by **Note (a)** we have that

$\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ $=$ $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot 1/g(x))$ $=$ $L \cdot 1/M$ $=$ L/M

which proves the theorem.

Submit Answer Incorrect. Tries 1/3 Previous Tries

Finally, let $\delta = \min(\delta_0,\delta_1)$. Then, for all $x \in D$ such that $0 < |x-c| < \delta$ we have $|1/g(x)-1/M| < [(2|g(x)-M|)/(M^2)] < (2/(M^2))(\varepsilon M^2/2) = \varepsilon$.

This shows that $\lim_{x\to c} 1/g(x)=1/M$.

Now, for an arbitrary numerator $f(x)$, by **Note (a)** we have that

$\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \lim_{x\to c}(f(x)\cdot 1/g(x)) = L \cdot 1/M = L/M$

which proves the theorem.

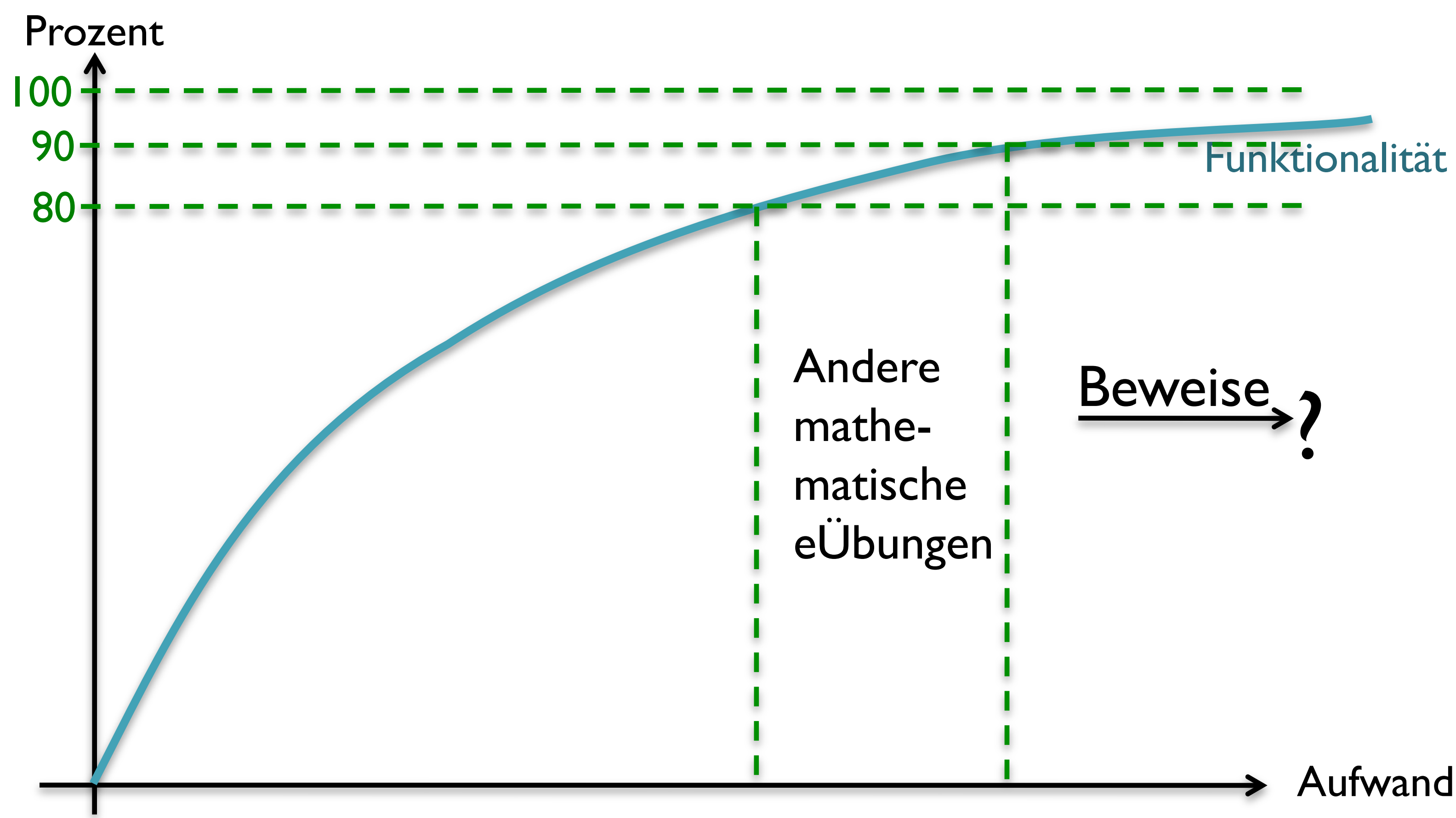
You are correct. Computer's answer now shown above.
Your receipt no. is 159-1816

Previous Tries

qed

Beweise und eLearning

- Im Moment



80%<pragmatisch<100%

- Mathematischer Typensatz
  - obwohl am CERN erfunden, bietet das Web kaum brauchbare Unterstützung von mathematischem Typensatz
- Aufgaben: mathematische Äquivalenz von Ausdrücken
  - nicht einfach nur Vergleich von Zeichenketten
- Aufgaben: mehr als eine Lösung
  - häufig müssen Ausdrücke nur bestimmte Bedingungen erfüllen
- Aufgaben: schwer zu randomisieren
  - Variation der Aufgaben benötigt symbolische Manipulationen
- Aufgaben: Antwort soll eine bestimmte Form haben
  - Beispiel: schreibe Antwort as Produkt zweier ungerader Polynome
  - Geht über rein mathematische Äquivalenz hinaus
- Beweise:
  - haben eine zentrale Rolle in der Mathematik, sind aber hochgradig offen und nur sehr bedingt algorithmisch auswertbar
  - trotz strikter Logik kreativ und „menschlich“

eLearning und Mathematik

- Man kann warten, bis Beweise im eLearning möglich werden, oder …
- … man kann schon heute eLearning wirksam in der Mathematiklehre einsetzen:
  - Üben von Techniken
  - Üben von Formalismen
  - Aufholen verpasster Grundlagen
  - „Schrittmacher"
- HiWis sind damit freigestellt, die Beweise zu korrigieren
- Computer erledigen die Routineaufgaben und ermöglichen mehr Übung und Feedback für Lernende,
  Menschen kümmern sich um anspruchsvollere Aufgaben und haben mehr Zeit für Tutoring
- Keine faulen Ausreden:
  selbst Deutsche könnten Pragmatiker sein*

* was nicht heißt, dass man mit der Forschung an elektronischen Beweisaufgaben aufhören soll

Vielen Dank!

Gerd Kortemeyer
Michigan State University
East Lansing, MI 48825
korte@lite.msu.edu
http://www.lite.msu.edu/kortemeyer/
http://www.lon-capa.org/